

Wytrzymałość konstrukcji 1

Wykład 1

Wprowadzenie do WK1

Stan naprężenia

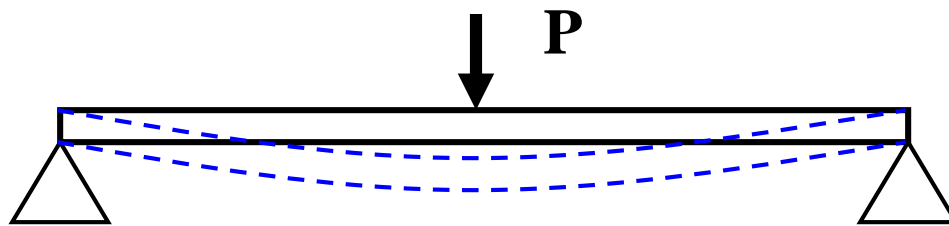
Płaski stan naprężenia

Wytrzymałość Konstrukcji

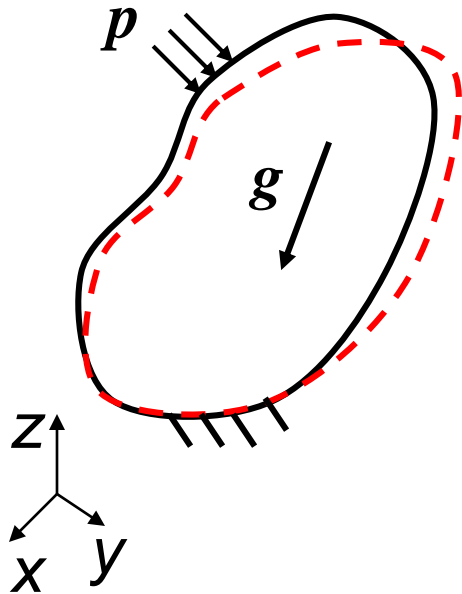
(Wytrzymałość materiałów, Mechanika konstrukcji)

Nauka o trwałości spotykanych w praktyce typowych elementów konstrukcji pod działaniem sił

Doświadczenie: pod działaniem sił wszystkie ciała stałe odkształcają się.



Ciało stałe + siły → **odkształcenia** → **zniszczenie ?**
(ustrój, element maszyny) (zmiana kształtu)



Zjawiska odkształcenia i zniszczenia ciała zależą od:

- 1) Rodzaju materiału (*stal, szkło itp.*) i jego stanu (*rodzaj obróbki mechanicznej, cieplnej, chemicznej*)
- 2) Kształtu i wymiarów (*wał maszyny, zbiornik gazu itp.*)
- 3) Rodzaju i wartości sił (*ciśnienie gazu, ciężar itp.*) i ich przebiegu w czasie (*stałe lub zmienne*)
- 4) Innych oddziaływań (*temperatura, promieniowanie itp.*)

Zadania WK:

- 1) Określenie wytrzymałości (*odporności na zniszczenie*)
- 2) Określenie podatności (*odkształcenia*)

Cel WK → Kontrola i kształtowanie

Prostota! Nacisk na stronę praktyczną (*przesłanki doświad. i teoretyczne*)

Teoria plastyczności i Teoria sprężystości – bliskie WK, ale złożony aparat

Uproszczony model ciała (model konstrukcji)

Rzeczywisty obiekt



schemat obliczeniowy

(Istotne cechy)

Model materiału



odstępujemy od mikrostruktury

~~Zmiany odległ. międzyatomowych~~

~~Zjawiska molekularne~~

~~10^{20} - 10^{30} atomów~~

1) ciągły (*continuum*)

2) jednorodny (*uśredniony*)

3) izotropowy (*właściwości nie zależą od kierunków*)

4) zwykła liniowa sprężystość

Kształt i wymiary



typowe elementy geometrii

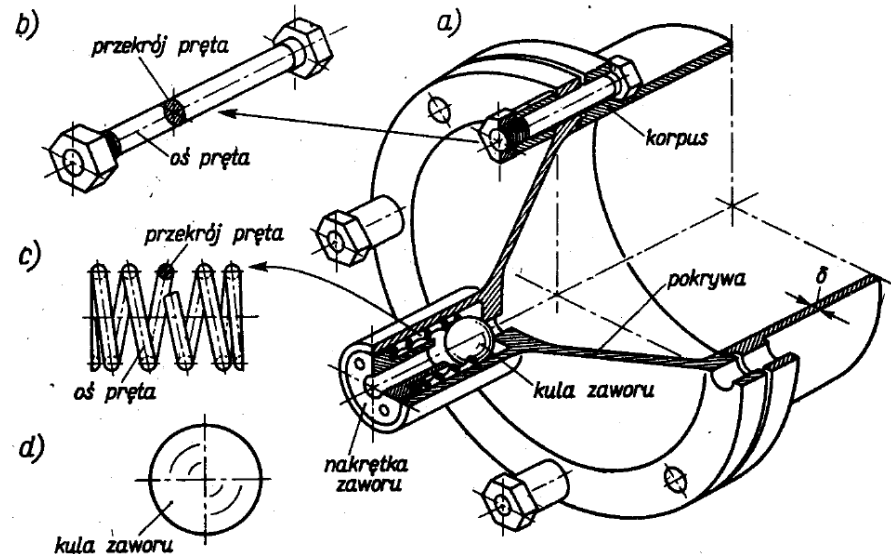
1) pręty

2) tarcze

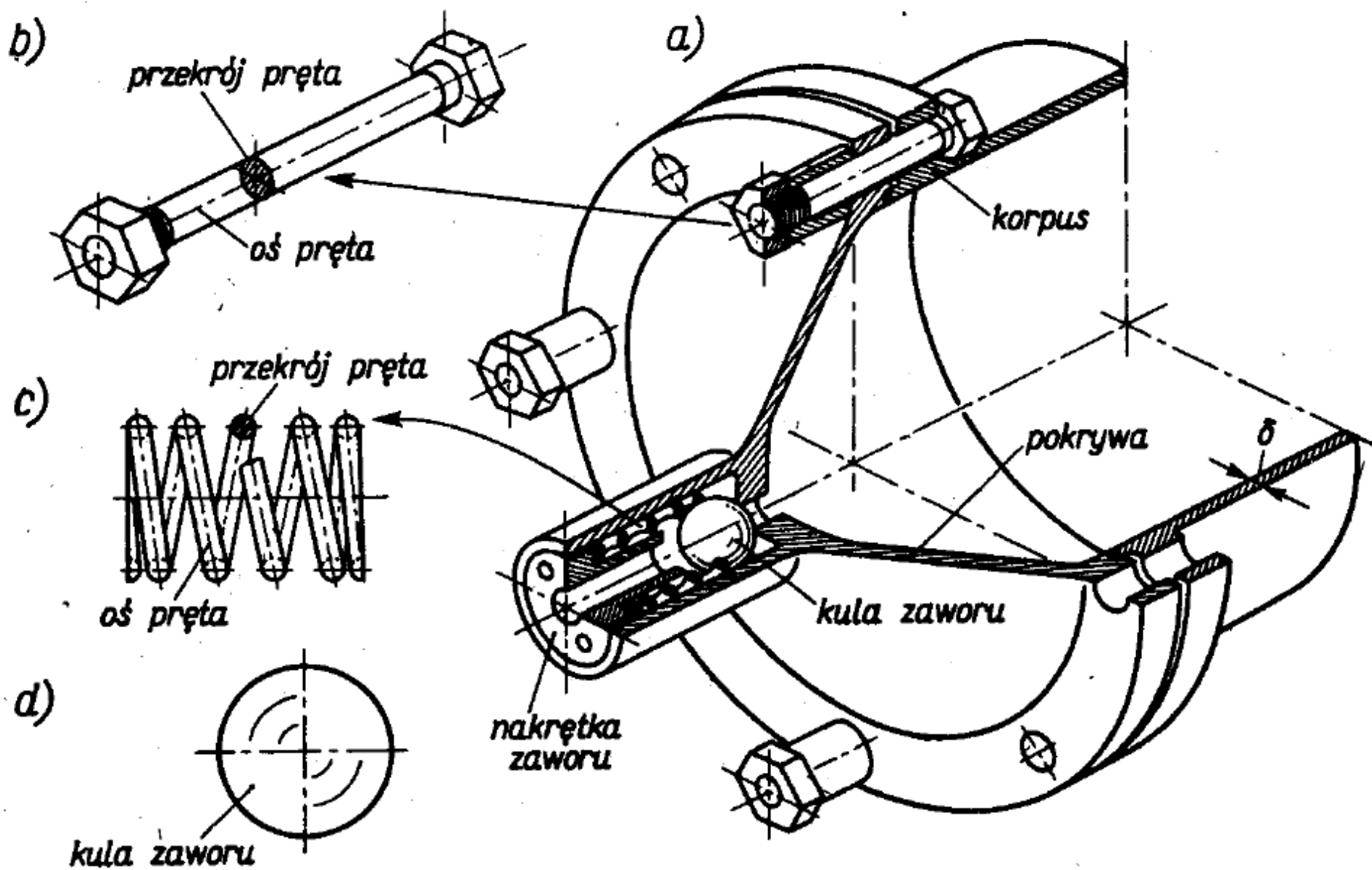
3) płyty

4) powłoki

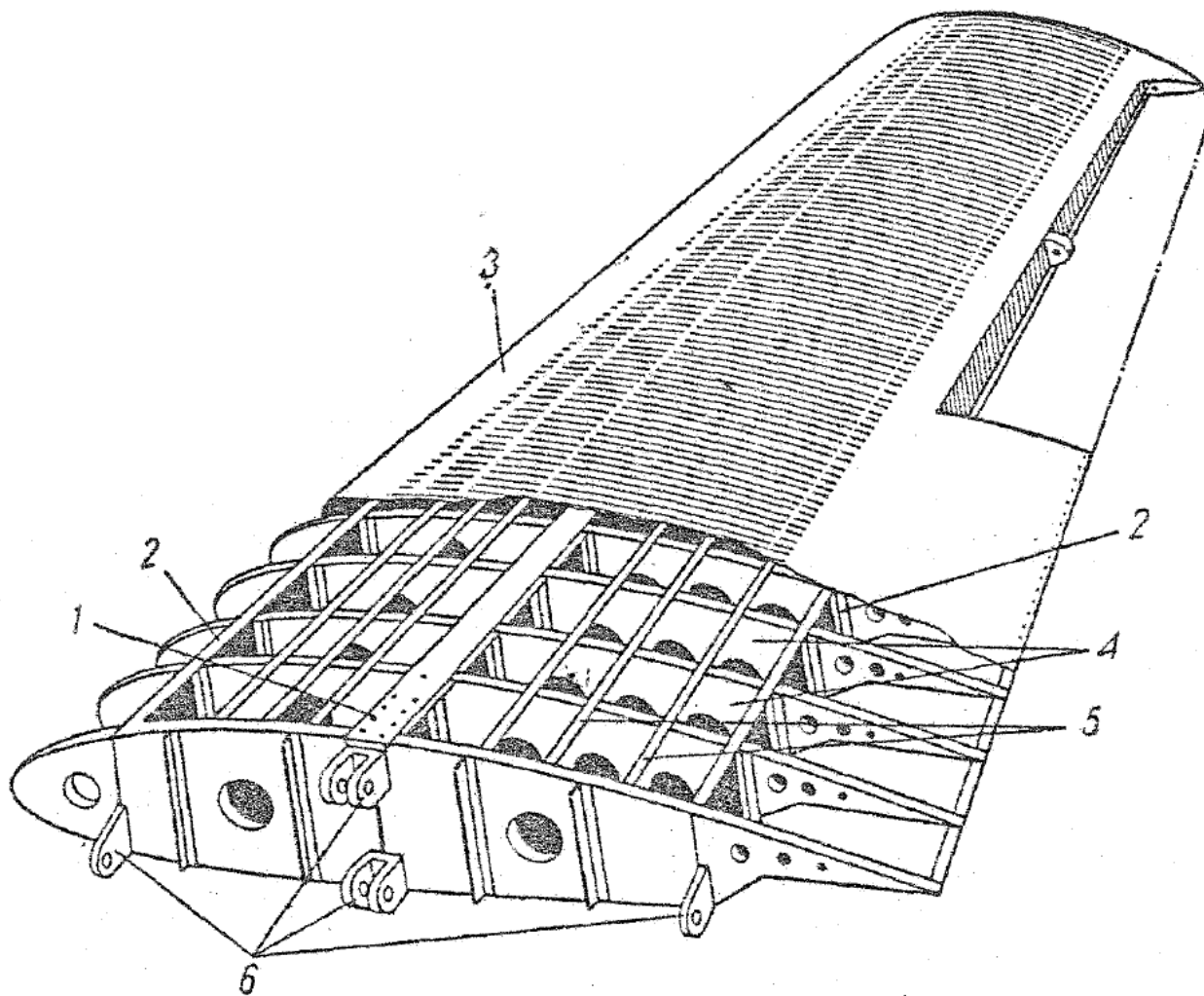
5) bryły zwarte



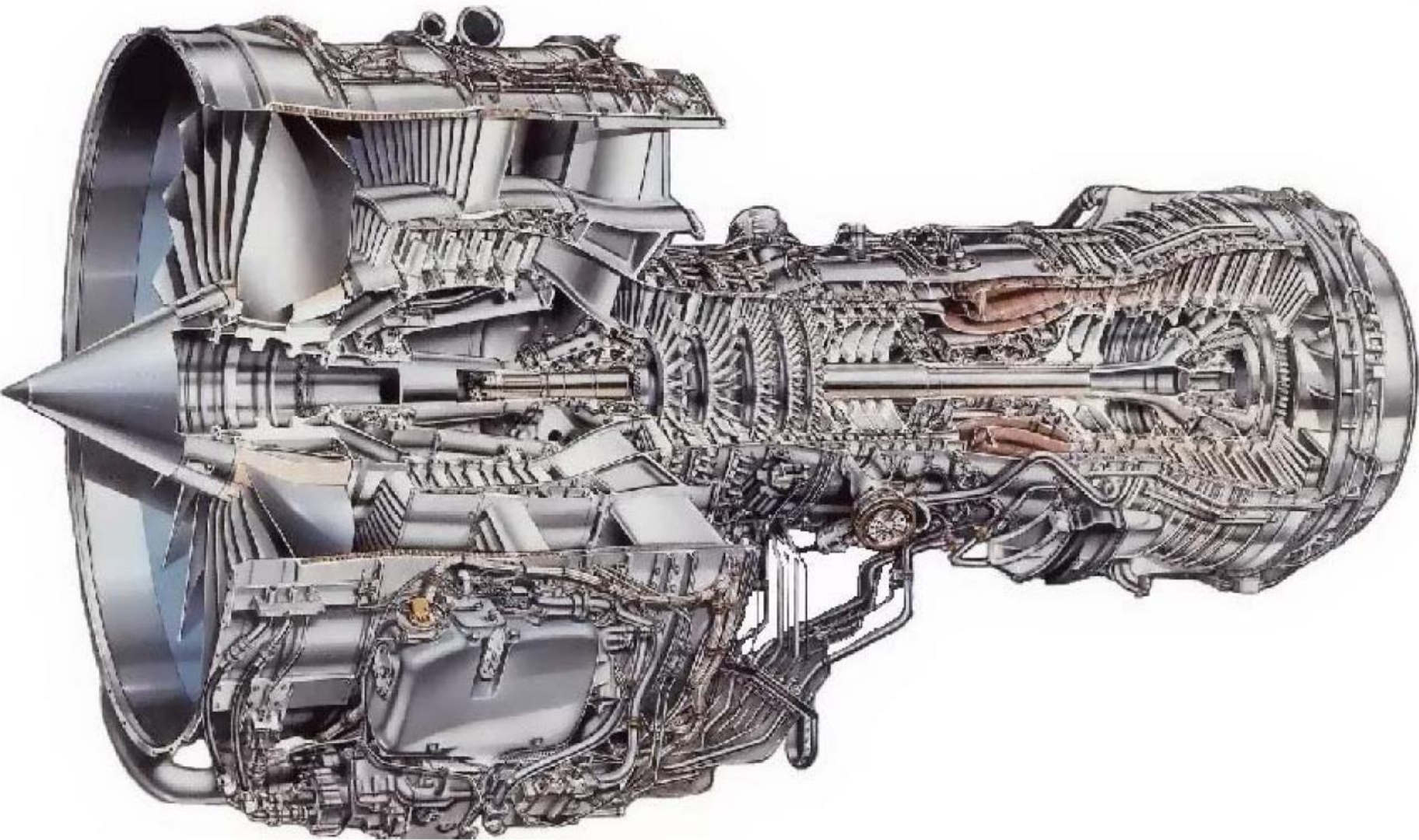
Rys. 1.1. Podział konstrukcji na typowe elementy



Rys. 1.1. Podział konstrukcji na typowe elementy



Rys. 5.44. Przykład jednodźwigarowej metalowej konstrukcji skrzydła z powłoką współpracującą, tworzącą komorę podwójną — o przekroju dwuobwodowym
 1 — dźwigar, 2 — ścianka przegrodowa, 3 — powłoka (sztywna), 4 — żebra, 5 — usztywnienia
 wzdłużne, 6 — okucie



Dwuprzepływowy silnik odrzutowy V2500

Ciąg: od: 97 kN, do 145 kN

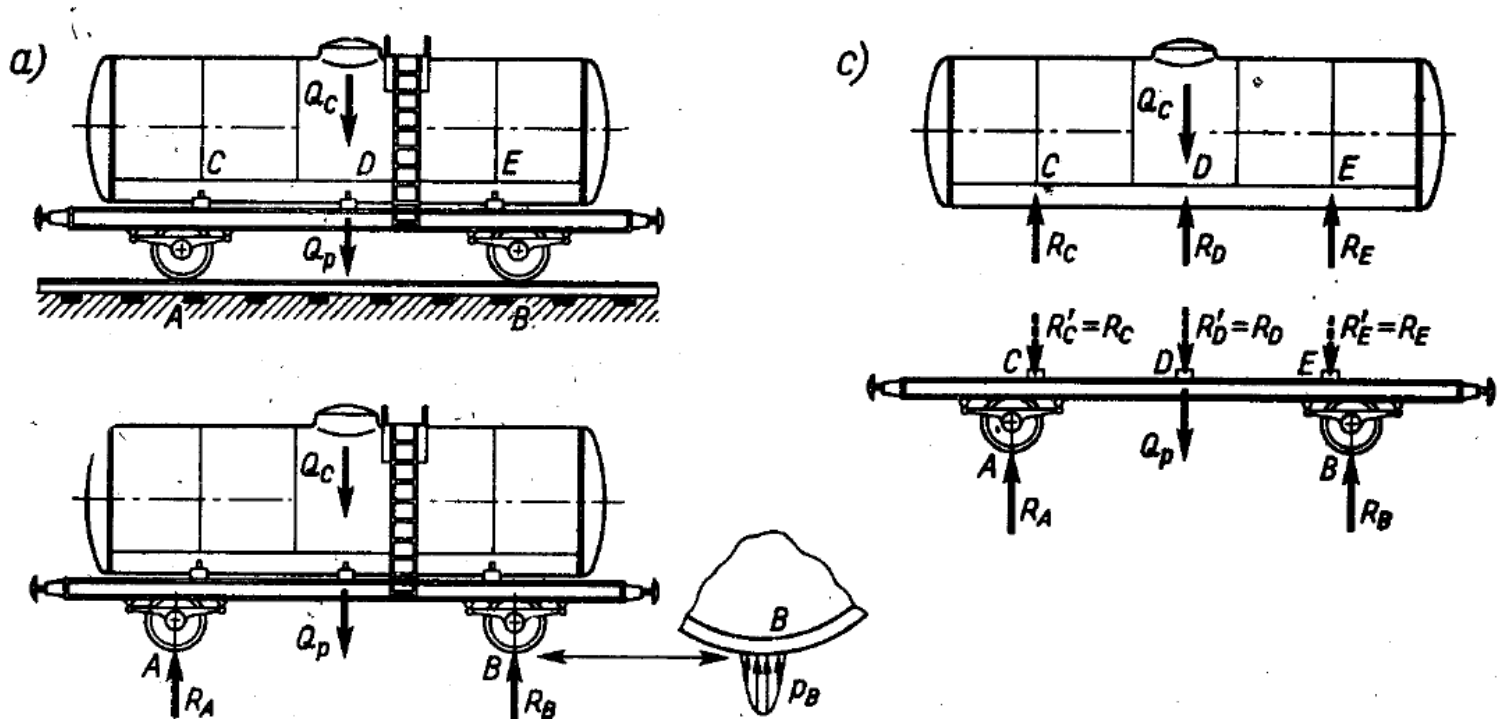
Obciążenia konstrukcji

Miarą mechanicznego oddziaływania ciał na siebie są siły

Siły zewnętrzne:

- objętościowe (ciężar, siły bezwładności)
- powierzchniowe (np.: ciśnienie, naciski w obszarze kontaktu)

- czynne
- bierne (reakcje)



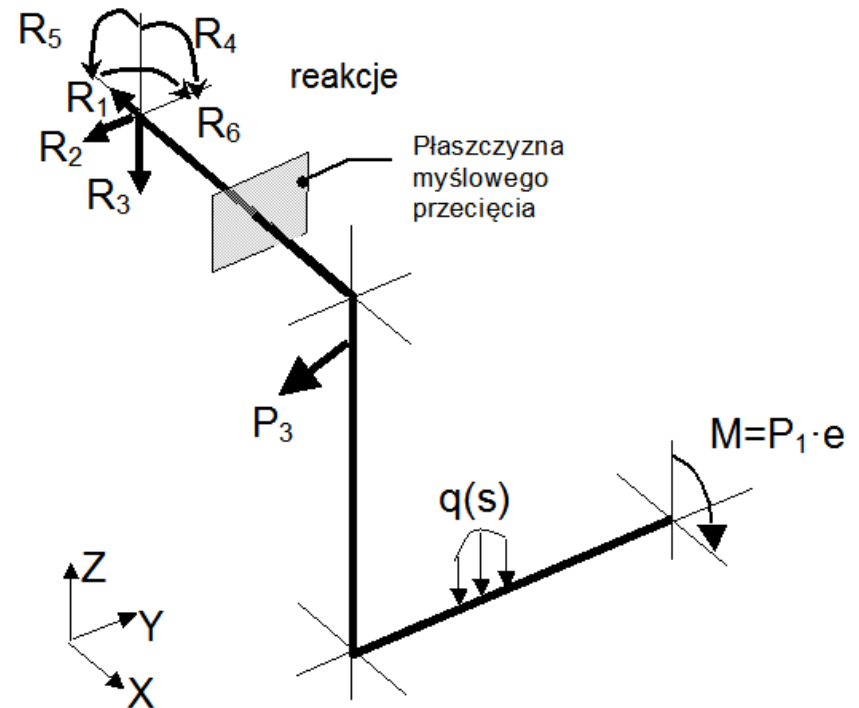
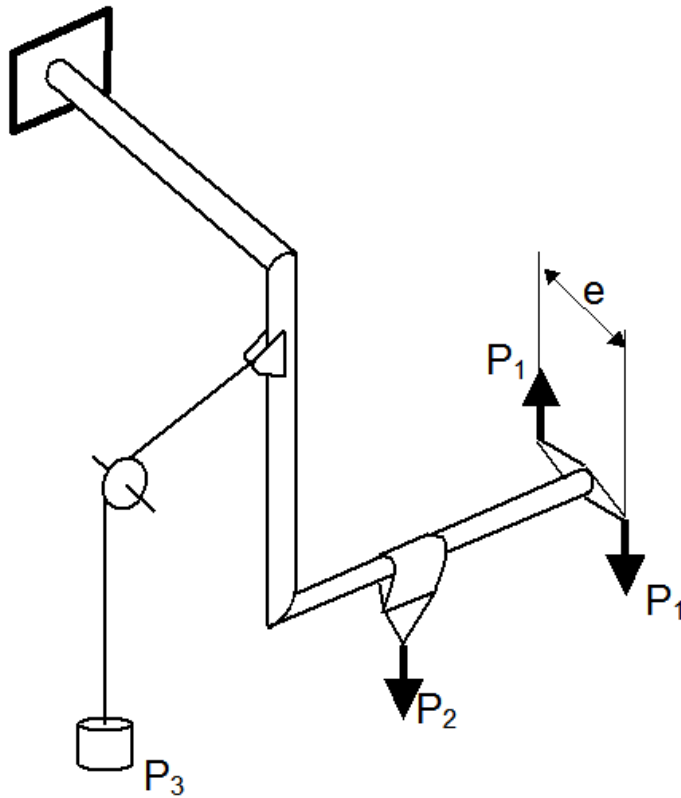
Rys. 1.2. Określenie obciążenia konstrukcji

Tworzenie modelu obliczeniowego

Model rzeczywisty



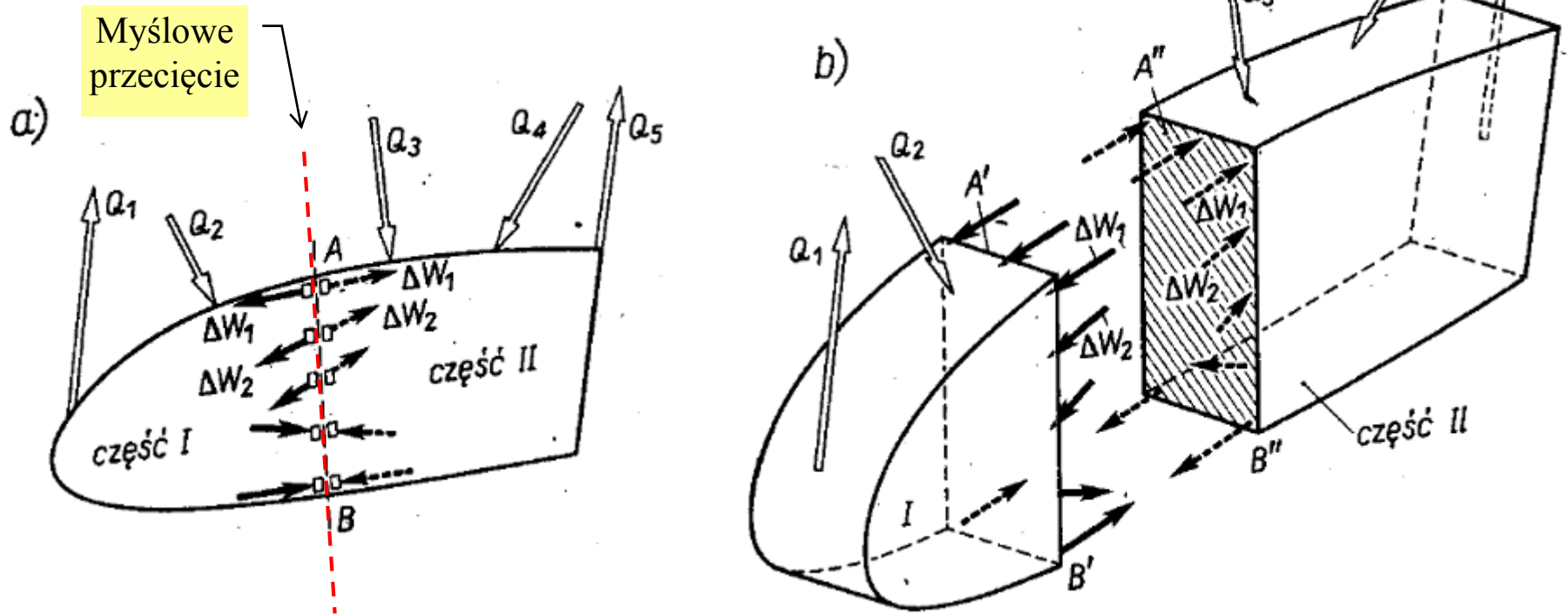
Model obliczeniowy



Obciążenia konstrukcji

Siły wewnętrzne:

*Siły działające w obrębie analizowanego obiektu
nie będące siłami zewnętrznymi*



Ujawnienie sił wewnętrznych

Siły ΔW (ciągłe strzałki) działania cząstek części II na odpowiadające im cząstki części I;
siły ΔW (przerywane strzałki) działania cząstek części I na cząstki części II.

Naprężenie

Naprężenie jest miarą intensywności obciążenia w przekroju

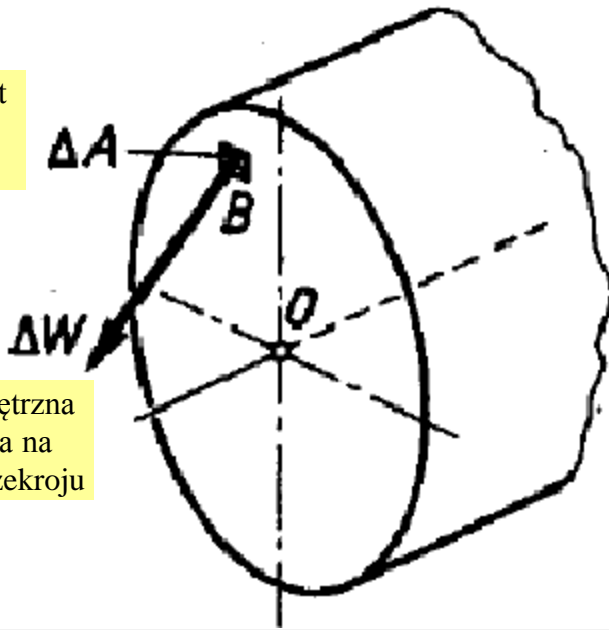
Naprężenie w punkcie to wartość do jakiej dąży stosunek siły ΔW działającej na element ΔA do pola tego elementu, gdy pole to dąży do zera

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{dW}{dA}$$

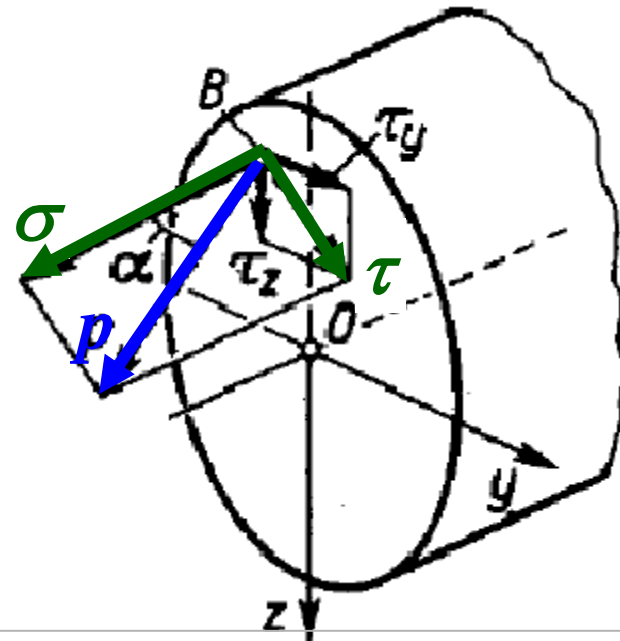
$\sigma = p \cdot \cos \alpha$ - naprężenia normalne

$\tau = p \cdot \sin \alpha$ - naprężenia styczne (tnące)

Mały element powierzchni przekroju

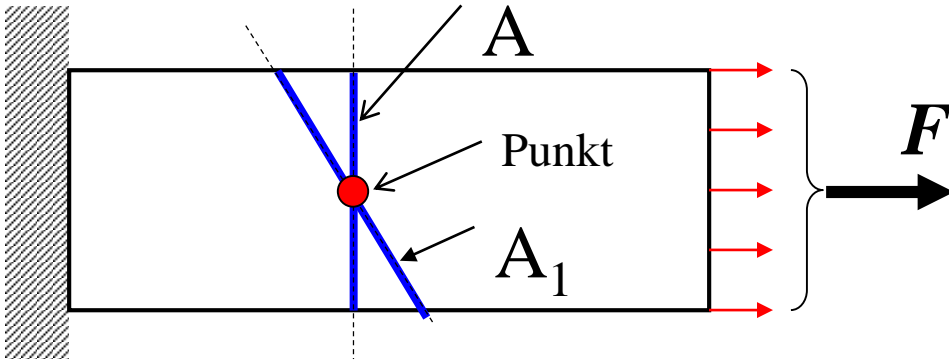


Siła wewnętrzna działająca na element przekroju



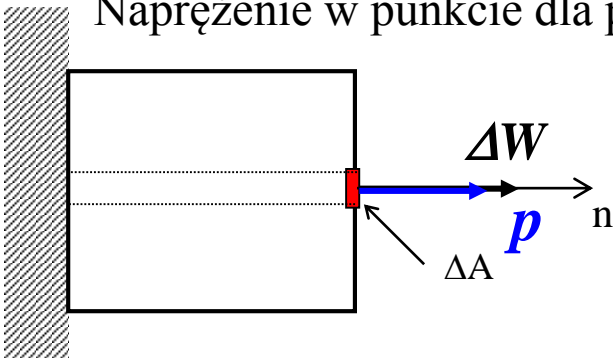
Wypadkowe naprężenia w punkcie można traktować jako wektor tylko wtedy, gdy ustalona jest płaszczyna przekroju.

Stan naprężenia w punkcie



Rozważmy cieką tarczę prostokątną umocowaną jednym końcem i obciążoną równomiernie na przeciwległym brzegu siłą rozciągającą F

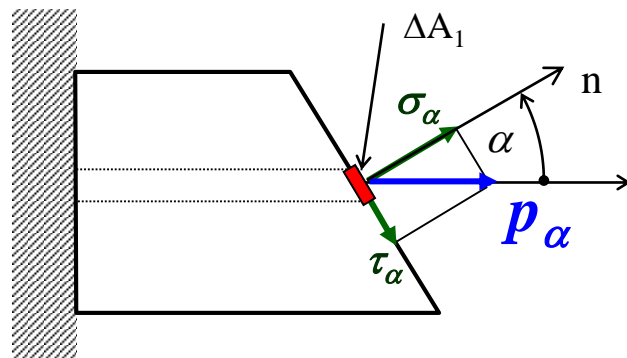
Naprężenie w punkcie dla przekroju A:



$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F}{A}$$

$$\begin{cases} \sigma = p \cos 0^\circ = p & \text{(napr. normalne)} \\ \tau = p \sin 0^\circ = 0 & \text{(napr. styczne)} \end{cases}$$

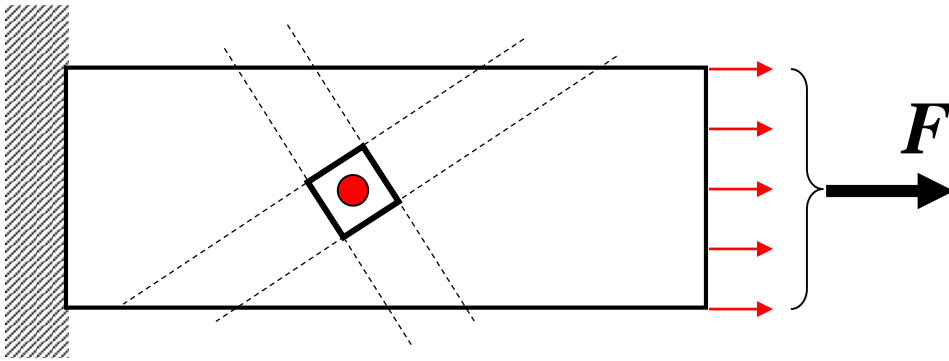
Naprężenie w punkcie dla przekroju A_1 :



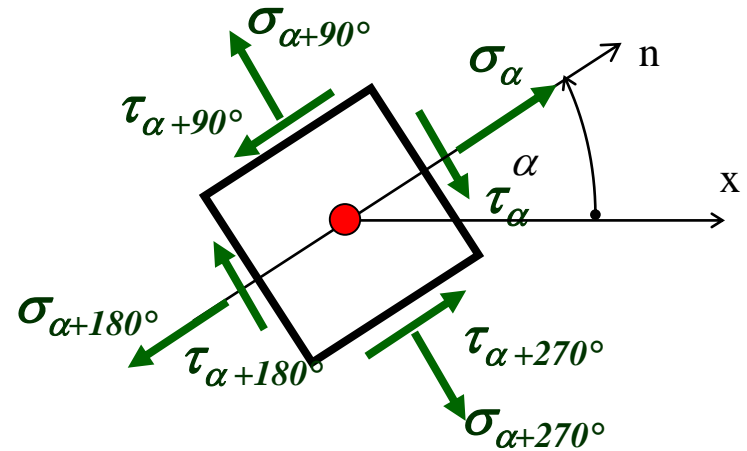
$$p_\alpha = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A_1} = \frac{F}{A} \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = p \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = p \cos \alpha \sin \alpha \end{cases}$$

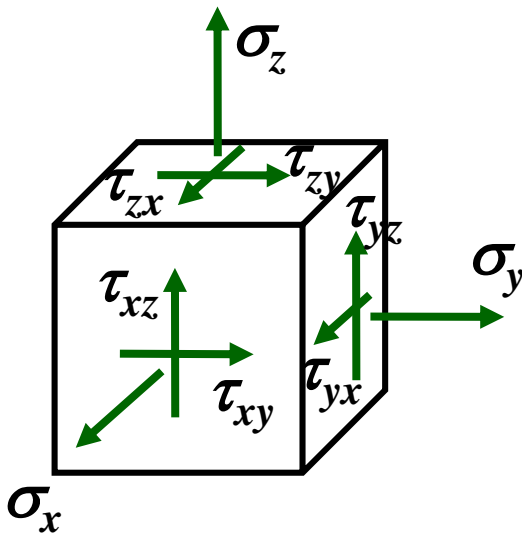
Naprężenie jako tensor



Jeśli wytniemy wokół punktu kostkę, pod kątem α :



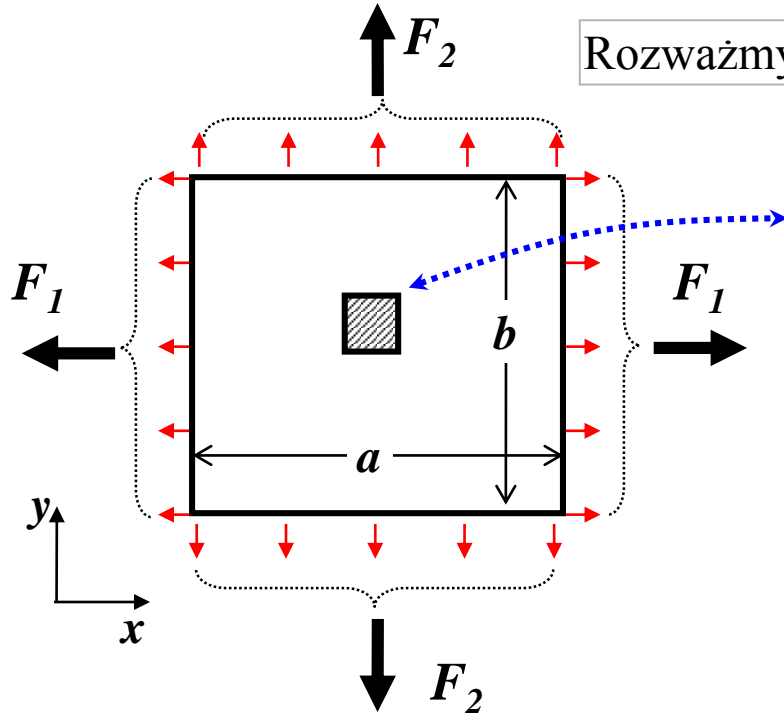
Stan naprężenia w punkcie opisany jest matematycznie przez tensor rzędu II



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Analiza Płaskiego Stanu Naprężenia (PSN)

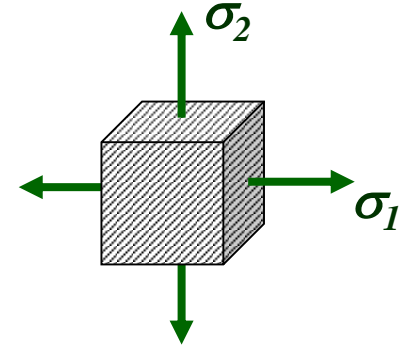
Rozważmy cienką tarczę o grubości δ rozciąganą siłami F_1 i F_2



Stan naprężenia w dowolnym punkcie tarczy przedstawimy na myślowo wyciętej kostce:

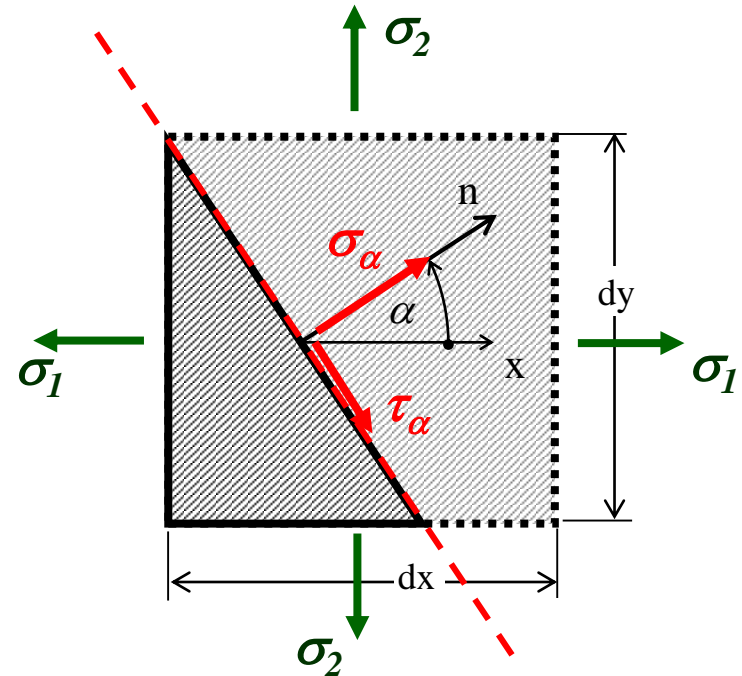
$$\sigma_1 = \frac{F_1}{b \cdot \delta}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{a \cdot \delta}$$

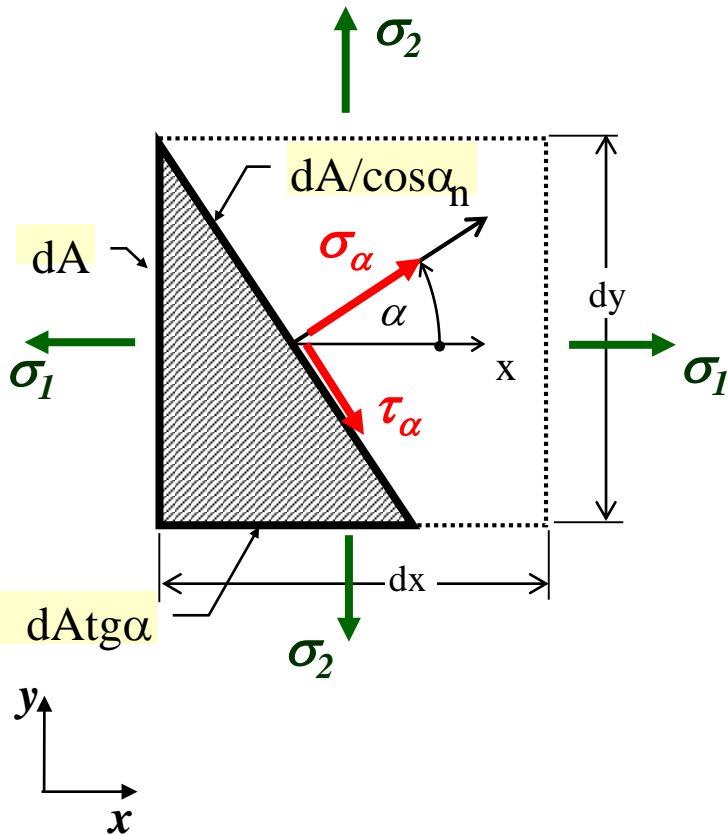


Przetnijmy tę kostkę płaszczyzną o normalnej pod kątem α do kierunku x

W płaszczyźnie tej ukażemy składową normalną σ_α i styczną τ_α stanu naprężenia



Analiza Płaskiego Stanu Naprężenia (PSN)



Równanie równowagi na oś x :

$$-\sigma_1 \cdot dA + \sigma_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha + \tau_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\frac{dA}{\cos\alpha} \cdot (-\sigma_1 \cdot \cos\alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_\alpha \cdot \sin\alpha) = 0$$

$$-\sigma_1 \cdot \cos\alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_\alpha \cdot \sin\alpha = 0 \quad (1)$$

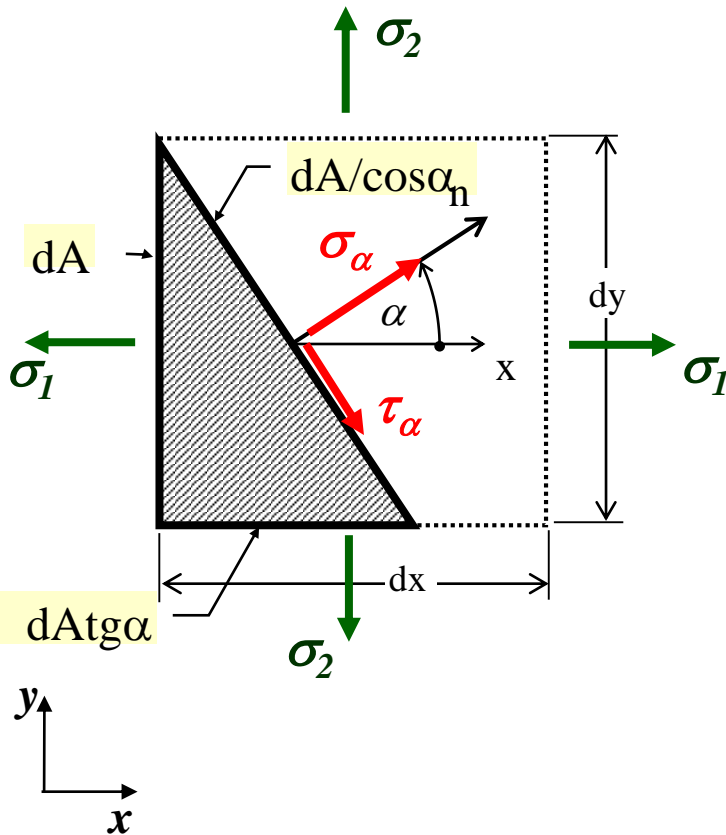
Równanie równowagi na oś y :

$$-\sigma_2 \cdot dA \cdot \operatorname{tg}\alpha + \sigma_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha - \tau_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\frac{dA}{\cos\alpha} \cdot (-\sigma_2 \cdot \sin\alpha + \sigma_\alpha \cdot \sin\alpha - \tau_\alpha \cdot \cos\alpha) = 0$$

$$-\sigma_2 \cdot \sin\alpha + \sigma_\alpha \cdot \sin\alpha - \tau_\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \quad (2)$$

Analiza Płaskiego Stanu Naprężenia (PSN)



$$-\sigma_1 \cdot \cos \alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos \alpha + \tau_\alpha \cdot \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$-\sigma_2 \cdot \sin \alpha + \sigma_\alpha \cdot \sin \alpha - \tau_\alpha \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$(1) \cdot \cos \alpha + (2) \cdot \sin \alpha :$$

$$-\sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos^2 \alpha + \tau_\alpha \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$-\sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_\alpha \cdot \sin^2 \alpha - \tau_\alpha \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$-(1) \cdot \sin \alpha + (2) \cdot \cos \alpha :$$

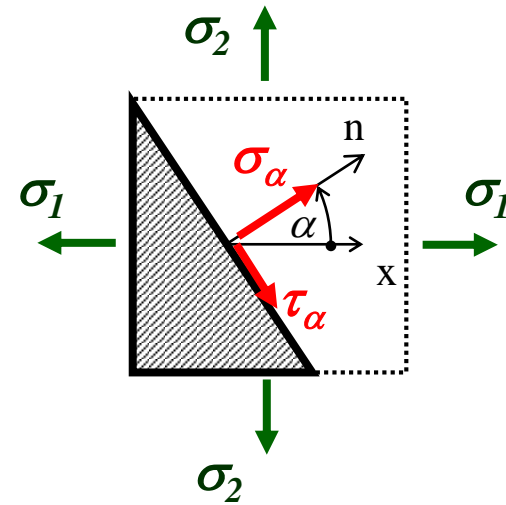
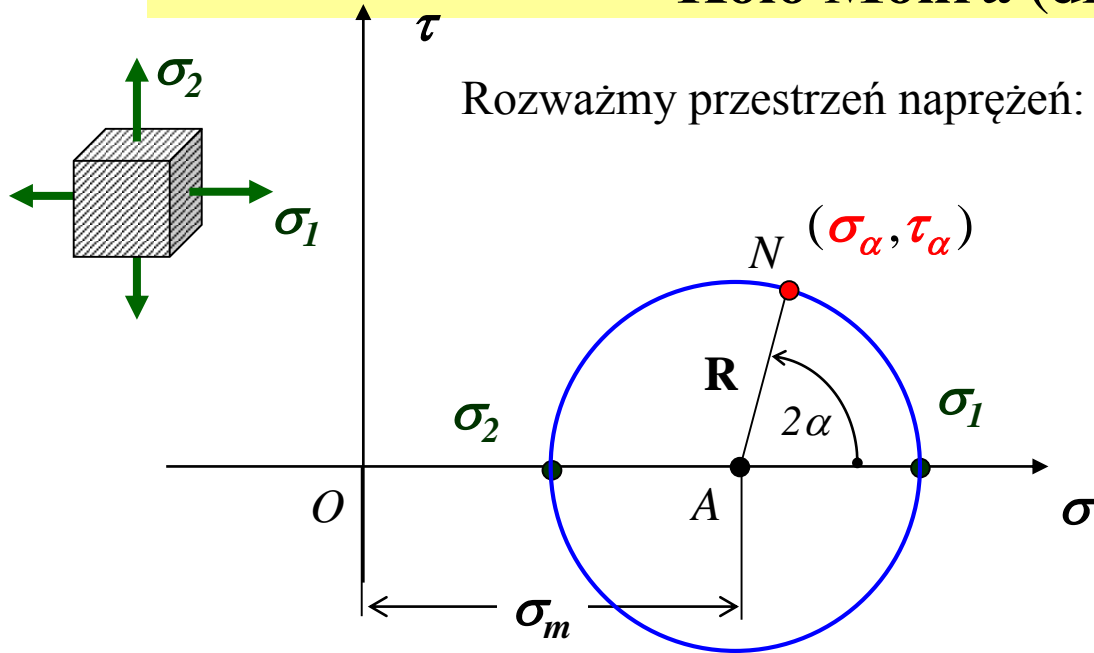
$$\sigma_1 \cdot \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_\alpha \cdot \cos \alpha \sin \alpha - \tau_\alpha \cdot \sin^2 \alpha = 0$$

$$-\sigma_2 \cdot \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_\alpha \cdot \cos \alpha \sin \alpha - \tau_\alpha \cdot \cos^2 \alpha = 0$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha$$

Uzyskaliśmy wzory transformacyjne przejścia od naprężeń głównych (σ_1, σ_2) do składowych stanu naprężenia na ściance o kierunku normalnej α do kierunku 1: ($\sigma_\alpha, \tau_\alpha$)

Koło Mohra (dla PSN)



Sprawdzamy wzory transformacyjne:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_m + R \cdot \cos 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{\sigma_2}{2} \cdot (1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

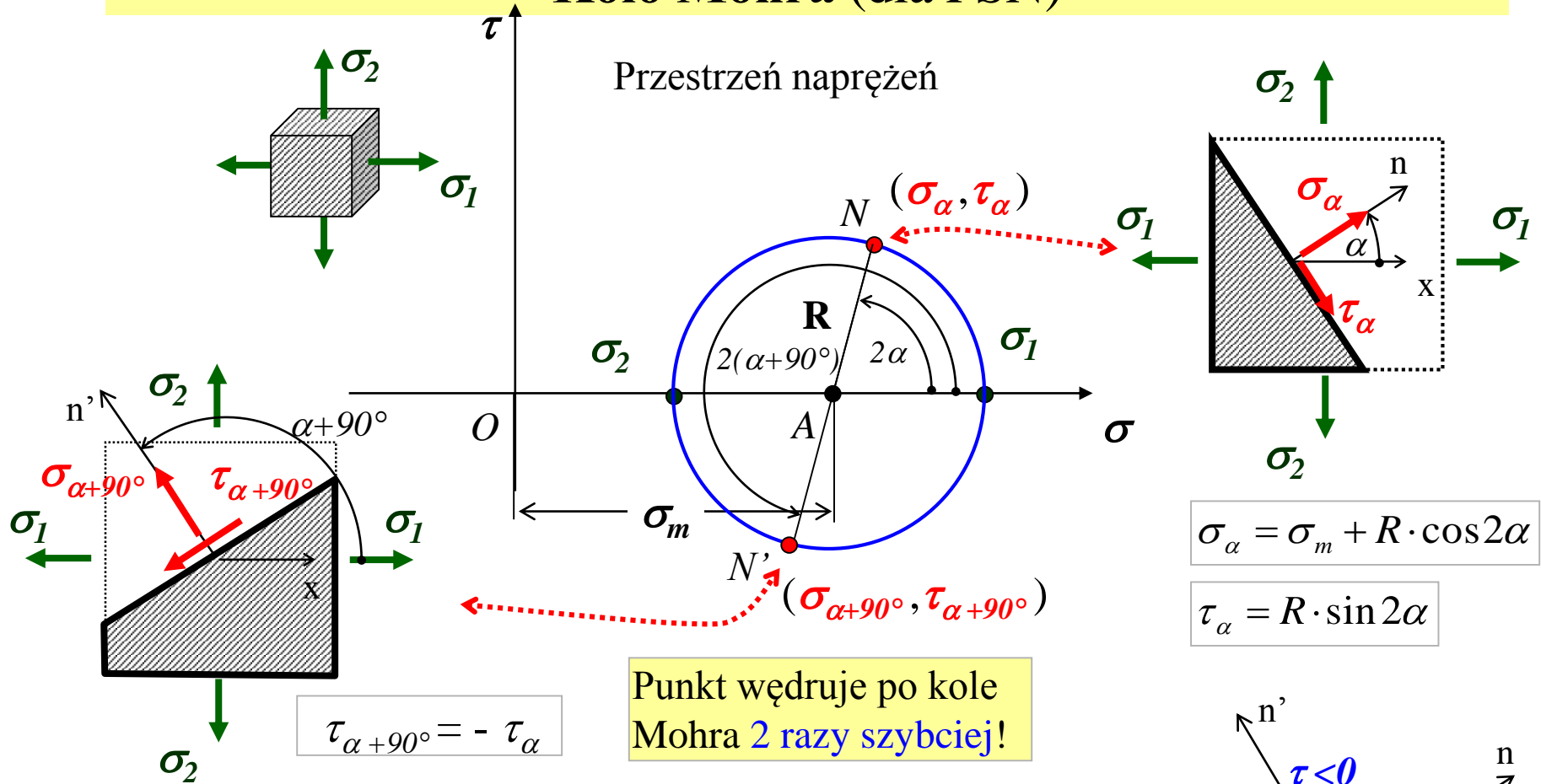
$$\tau_{\alpha} = R \cdot \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha$$

Wyszło to samo co we wzorach transformacyjnych!

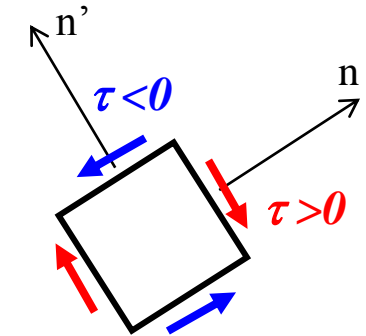
Punkt N reprezentuje więc stan naprężenia dla przekroju o normalnej w kierunku α do kierunku 1

Koło Mohra (dla PSN)



Właściwości PSN:

- 1) Istnieją tylko 2 przekroje takie, że σ_1, σ_2 i wtedy $\tau_\alpha = 0$ (**naprężenia główne** w kierunkach prostopadłych do siebie – **kierunki główne**)
- 2) Dla $\sigma_1 > \sigma_2$ musi być: $\sigma_1 \geq \sigma_\alpha \geq \sigma_2$
- 3) Ekstremalne naprężenia tnące τ_{max} wystąpią w przekroju $\alpha = 45^\circ$ względem kierunków głównych



Konwencja znaku naprężeń tnących na kole Mohra